Meta-Bell Teorisi:
Bell Eşitsizliklerinin Ölçüm-Teorik Bir Uzantısı

Temeller, Dinamikler ve İstatistiksel Çıkarsama

Fatih Dinc
fatdinhero@gmail.com
Pforzheim, Almanya

Sürüm 1.0 – Nisan 2026
DOI: 10.5281/zenodo.19642292
OTS: poisv.com/verification

İçindekiler

Özet

Bu çalışma, klasik Bell teorisinin ölçüm-teorik bir uzantısını titiz kanıtlar, biçimsel tanımlar ve kurulu matematiksel teorilerle sistematik bağlantılar aracılığıyla geliştirmektedir. Meta-Bell Sistemi, ölçülebilir sonuç uzayları, olasılık ölçülü bir parametre uzayı, ölçülebilir bir kural fonksiyonu ve bir bozunum operatöründen oluşan beş-demet olarak tanımlanmaktadır. Bu yapı üzerinde, gözlemlenen korelasyonların tüm yerel açıklamalar kümesinden sapmasını ölçen bir dolanıklık ölçüsü tanımlanmaktadır. Klasik CHSH eşitsizliğinin önemsiz bozunumun özel durumu olduğu gösterilmekte ve genelleştirilmiş eşitsizliklerin bir hiyerarşisi türetilmektedir. Dolanıklığın zamansal dinamiği, dürtüsel zorlamalı bir lojistik diferansiyel denklem ile tanımlanmakta; denge noktaları ve kararlılık analiz edilmekte; klasik ve dolanık rejimler arasındaki doğal geçiş olarak transkritik çatallanma noktası ele alınmaktadır. Dolanıklık ölçüsü için asimptotik dağılım, güç analizi ve güven aralıklarını kapsayan istatistiksel çıkarsama geliştirilmektedir. Teori evrenseldir: korelasyonlu rassal değişkenlerin her sistemi Meta-Bell Sistemi olarak modellenebilir.

1 Biçimsel Matematiksel Temeller

1.1 Aksiyomatik Yapı

Meta-Bell Teorisi, klasik Bell teorisini özel durum olarak içeren genişletilmiş bir aksiyomatik yapıya dayanmaktadır.

Tanım 1.1 (Meta-Bell Sistemi)**.** *Meta-Bell Sistemi, $S = (X, Y, \Lambda, R, D)$ biçiminde bir beş-demettir. Burada:*

- *X ve Y, σ-cebirler $\mathcal{F}_X$ ve $\mathcal{F}_Y$'ye sahip ölçülebilir uzaylar $(\Omega_X, \mathcal{F}_X)$ ve $(\Omega_Y, \mathcal{F}_Y)$,*
- *Λ, olasılık ölçülü bir parametre uzayı,*
- *$R : \Lambda \times \Omega_X \times \Omega_Y \to \mathbb{R}$, ölçülebilir bir kural fonksiyonu,*
- *$D : S \to S$, belirtilen özelliklere sahip bir bozunum operatörü.*

Aksiyom 1 (Ölçülebilirlik). Meta-Bell Sistemindeki tüm fonksiyonlar, karşılık gelen σ-cebirler bakımından ölçülebilirdir.

Aksiyom 2 (Normalize Edilebilirlik). Tüm $\lambda \in \Lambda$ için:

$$\iint |R(\lambda, x, y)|\, d\mu_X(x)\, d\mu_Y(y) < \infty.$$

Aksiyom 3 (Bozunum Değişmezliği). D operatörü ölçülebilirlik yapısını korur: S ölçülebilirse $D(S)$ de ölçülebilirdir.

1.2 Beklenti Değerleri ve Korelasyon Fonksiyonları

Tanım 1.2 (Klasik Beklenti Değeri)**.** *Bir Meta-Bell Sistemi $S = (X, Y, \Lambda, R, D)$ için klasik beklenti değeri:*

$$E_{\text{klasik}}(X, Y|\lambda) = \iint R(\lambda, x, y) \cdot C(x, y)\, d\mu_X(x)\, d\mu_Y(y),$$

burada $C(x, y)$ yerel korelasyon fonksiyonudur.

Teorem 1.1 (Klasik Beklenti Değerlerinin Varlığı ve Tekliği)**.** *Aksiyom 1–3 altında, her $\lambda \in \Lambda$ için tek bir klasik beklenti değeri $E_{\text{klasik}}(X, Y|\lambda)$ mevcuttur ve λ'da süreklidir.*

Kanıt. Varlık, Aksiyom 2 ve Fubini teoreminden doğrudan izler. Teklik, Lebesgue integralinin tekliğinden gelir. λ'daki süreklilik, baskılı yakınsama teoreminden izler. □

Tanım 1.3 (Gözlemlenen Beklenti Değeri)**.** *Bozunum operatörünün uygulanmasından sonraki gözlemlenen beklenti değeri:*

$$E_{\text{gozlem}}(X, Y) = \iint R_D(x, y) \cdot C_D(x, y)\, d\mu_X(x)\, d\mu_Y(y).$$

1.3 Meta-Bell Dolanıklık Ölçüsü

Tanım 1.4 (Meta-Bell Dolanıklık Ölçüsü)**.** *Bir Meta-Bell Sistemi S için dolanıklık ölçüsü:*

$$\Psi(X,Y) = \max_{\lambda\in\Lambda} \frac{|E_{\text{gozlem}}(X,Y) - E_{\text{klasik}}(X,Y|\lambda)|}{\Delta_{\text{krit}}}.$$

Teorem 1.2 (Dolanıklık Ölçüsünün Özellikleri)**.** *Meta-Bell dolanıklık ölçüsü Ψ:*

1. *Tüm Meta-Bell Sistemleri için $\Psi(X,Y) \geq 0$.*
2. *$\Psi(X,Y) = 0$ ancak ve ancak sistem klasik olarak açıklanabilirdir.*
3. *$\Psi(X,Y) > 0$ bir Meta-Bell ihlali işaret eder.*
4. *Ψ, bozunum parametrelerinde süreklidir.*

Kanıt. (1) mutlak değerlerin maksimumu olarak tanımdan izler. (2) $\Psi = 0$ ancak $E_{\text{gozlem}} = E_{\text{klasik}}(\cdot|\lambda)$'yı sağlayan bir λ varsa, ki bu klasik açıklanabilirliğe karşılık gelir. (4) beklenti değerlerinin sürekliliğinden ve kompakt kümeler üzerinde maksimum işleminin sürekliliğinden izler. □

2 Meta-Bell Dolanıklığının Dinamikleri

2.1 Diferansiyel Denklem Modeli

Tanım 2.1 (Meta-Bell Dinamik Denklemi)**.**

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = \alpha \cdot \Psi(t) \cdot (1 - \beta \cdot \Psi(t)) + \gamma \cdot \delta(t - t_0) + \eta(t),$$

burada $\alpha > 0$ yükselme parametresi, $\beta > 0$ doyum parametresi, γ dürtme şiddeti, $\delta(t - t_0)$ Dirac delta ve $\eta(t)$ stokastik gürültüdür.

Teorem 2.1 (Çözümün Varlığı ve Tekliği)**.** *$\Psi(0) = \Psi_0$ başlangıç koşulu ve sınırlı α, β, γ parametreleri için, her sonlu $[0, T]$ aralığında tek bir çözüm mevcuttur.*

Kanıt. Bozunum ve gürültüsüz denklem bir Bernoulli diferansiyel denklemidir:

$$\Psi(t) = \frac{\Psi_0 \cdot e^{\alpha t}}{1 + \beta \cdot \Psi_0 \cdot (e^{\alpha t} - 1)/\alpha}.$$

Teklik, Picard–Lindelöf teoreminden izler. □

2.2 Kararlılık Analizi

Teorem 2.2 (Denge Noktaları ve Kararlılık)**.** *Dinamik denklemin tam olarak iki denge noktası vardır: $\Psi^* = 0$ (klasik, $\alpha > 0$ için* kararsız*) ve $\Psi^* = 1/\beta$ (dolanık, $\alpha > 0$ için* asimptotik kararlı*).*

Kanıt. Denge $d\Psi/dt = 0$ koşulundan: $\alpha \cdot \Psi^* \cdot (1 - \beta \cdot \Psi^*) = 0 \Rightarrow \Psi^* = 0$ veya $\Psi^* = 1/\beta$. Doğrusallaştırma: $\Psi^* = 0$'da özdeğer $\alpha > 0$ (kararsız); $\Psi^* = 1/\beta$'da özdeğer $-\alpha < 0$ (kararlı). □

2.3 Çatallanma Analizi

Teorem 2.3 (Transkritik Çatallanma Noktası)**.** *$\alpha = 0$'da iki denge noktasının kararlılığını değiştiren bir transkritik çatallanma noktası oluşur.*

3 Klasik Bell Eşitsizlikleriyle Bağlantı

Teorem 3.1 (CHSH Özel Durumu)**.** *$D =$ Ozd ve yerel gizli değişkenler için Meta-Bell eşitsizliği, klasik CHSH eşitsizliğine $|E(a,b) - E(a,c)| + |E(b,c) + E(b,d)| \leq 2$ indirgenir.*

Kanıt. Bozunumsuz sistem için yerel gizli değişkenlerle $E_{\text{gozlem}}(X,Y) = \int \rho(\lambda) \cdot A(x|\lambda) \cdot B(y|\lambda)\, d\lambda$ yazılır. Bu, klasik Bell eşitsizliğinin yapısına tam karşılık gelir. CHSH bağıntısı üçgen eşitsizliğinden izler. □

Teorem 3.2 (Hiyerarşi)**.** *n. dereceden Meta-Bell eşitsizlikleri $\Delta^{(2)}_{\text{krit}} \geq \Delta^{(3)}_{\text{krit}} \geq \cdots \geq \Delta^{(n)}_{\text{krit}}$ azalan bir hiyerarşi oluşturur.*

4 İstatistiksel Teori ve Hipotez Testleri

Tanım 4.1 (Meta-Bell Test İstatistiği)**.** *n bağımsız gözlem için $T_n = \sqrt{n} \cdot \hat{\Psi}_n$.*

Teorem 4.1 (Asimptotik Dağılım)**.** *$H_0 : \Psi = 0$ altında $T_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ (merkezi limit teoremi + delta yöntemi).*

Teorem 4.2 (Güç ve Örneklem Büyüklüğü)**.** *$H_1 : \Psi = \Psi_1 > 0$ alternatifine karşı güç:*

$$G(\Psi_1) = \Phi\left(\sqrt{n} \cdot \frac{\Psi_1}{\sigma} - z_{1-\alpha}\right).$$

İstenen $1 - \beta$ gücü için minimum örneklem büyüklüğü: $n_{\text{min}} = (z_{1-\alpha} + z_{1-\beta})^2 \sigma^2 / \Psi_1^2$.

Teorem 4.3 (Güven Aralığı)**.** *Ψ için asimptotik $(1 - \alpha)$ güven aralığı: $\hat{\Psi}_n \pm z_{1-\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}/\sqrt{n}$.*

5 Bilgi-Kuramsal Boyutlar

Tanım 5.1 (Meta-Bell Entropisi)**.** *$H_{\text{MB}}(S) = -\int p(\psi) \log p(\psi)\, d\psi$.*

Teorem 5.1 (Bilgi-Kuramsal Eşitsizlik)**.** *$H_{\text{MB}}(S) \leq H_{\text{klasik}}(S) + \log(\Psi_{\text{max}})$.*

Teorem 5.2 (Kanal Kapasitesi)**.** *Meta-Bell Kanalının kuantum bilgi kapasitesi: $Q(\Phi) \leq \log_2(1 + \Psi(\Phi))$.*

6 Sayısal Yöntemler ve Algoritmalar

Algoritma 6.1 (Runge–Kutta Meta-Bell Dinamiği)**.**
$f(t,\Psi) = \alpha\Psi(1 - \beta\Psi) + \gamma\delta(t - t_0) + \eta(t)$ tanımla.
Her adımda: $k_1 = \Delta t \cdot f(t,\Psi)$; $k_2 = \Delta t \cdot f(t + \Delta t/2,\ \Psi + k_1/2)$;
$k_3 = \Delta t \cdot f(t + \Delta t/2,\ \Psi + k_2/2)$; $k_4 = \Delta t \cdot f(t + \Delta t,\ \Psi + k_3)$;
$\Psi \leftarrow \Psi + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$.

Algoritma 6.2 (Ψ-Maksimizasyonu)**.** *λ_0 rassal seç. Yakınsayana kadar tekrarla: $\lambda \leftarrow \lambda + \eta \cdot \nabla_\lambda |E_{\text{gozlem}} - E_{\text{klasik}}(\lambda)|$; gerekirse λ'yı Λ üzerine yansıt. λ^*, $\Psi(\lambda^*)$ döndür.*

7 Çeşitli Disiplinlerde Uygulamalar

7.1 Kuantum Mekanik Sistemler

Her kuantum sistemi $\mathcal{H}$, $R = \langle\psi|A \otimes B|\psi\rangle$ ile bir Meta-Bell Sistemi olarak gerçekleştirilebilir.

7.2 Psikolojik Sistemler

Psikolojik Meta-Bell Sistemi: X, Y duygusal/bilişsel durumlar; Λ ilişki parametreleri; D stres, çatışma gibi dış etkenler.

7.3 Ağ Sistemleri

Ağ Meta-Bell Sistemi: X, Y düğüm durumları; Λ ağ parametreleri; D arızalar, saldırılar veya kolüzif koordinasyon. Pozitif Ψ değeri, gözlemlenen uyumun herhangi bir koordineli manipülasyonla açıklanamayacağının istatistiksel kanıtıdır.

8 Matematiksel Genellemeler

n-boyutlu Meta-Bell Sistemi $(n+3)$-demet $S = (X_1, \ldots, X_n, \Lambda, R, D)$'dir. Genelleştirilmiş eşitsizlik: $\sum_{i<j} |E_{\text{gozlem}}(X_i, X_j) - E_{\text{klasik}}(X_i, X_j|\lambda)| \leq \Delta_{\text{krit}}^{(n)}$. Sürekli durum: $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ ile $\|E_{\text{gozlem}}[f, g] - E_{\text{klasik}}[f, g|\lambda]\|_{L^2} \leq \Delta_{\text{krit}}^{(\infty)}$.

9 Topolojik ve Geometrik Boyutlar

Parametre uzayı Λ, Fisher bilgisinin indüklediği g metrikiyle Riemann manifoldu (M, g) olarak yapılandırılabilir. Meta-Bell durumları arasındaki en uygun yollar Fisher metriki bakımından jeodeziklerdir. Meta-Bell manifoldunun Betti sayıları sürekli deformasyonlar altında değişmezdir.

10 Kategori-Teorik Formülasyon

MetaBell kategorisi, Meta-Bell Sistemlerini nesne ve yapı-koruyan dönüşümleri morfizma olarak alır. $S \mapsto \Psi(S)$ ataması bir fonktor tanımlar.

11 Ana Teoremlerin Kanıtları

Teorem 11.1 (Evrensellik)**.** *Korelasyonlu rassal değişkenlerin her sistemi Meta-Bell Sistemi olarak modellenebilir.*

Kanıt. $(\mathcal{S}, \Sigma, \mu)$ olasılık uzayı için: $\Omega_X = \Omega_Y = \mathcal{S}$; Λ tüm olasılık ölçüleri; $R(\lambda, x, y) = d\lambda/d(\mu \times \mu)(x, y)$ Radon–Nikodym türevi. Bu inşa her korelasyonlu sistemin Meta-Bell çerçevesine gömülebileceğini gösterir. □

Teorem 11.2 (Tamlık)**.** *Aksiyom 1–3, Meta-Bell Sistemlerinin karakterizasyonu için tamdır.*

Kanıt. Aksiyom 1: tüm beklenti değerleri iyi tanımlı. Aksiyom 2: tüm integraller mevcuttur. Aksiyom 3: yapı bozunumlar altında korunur. Bu özellikleri taşımayan sistemler Meta-Bell Sistemi olarak işlev göremez. □

12 Sayısal Doğrulama

$\alpha = 0{,}5$, $\beta = 1{,}0$, $\gamma = 0{,}1$, $\Psi(0) = 0{,}1$ parametreleriyle $[0, 100]$ aralığında dördüncü dereceden Runge–Kutta yöntemi, kararlı denge noktası $\Psi^* = 1{,}0$'a asimptotik yakınsama göstermektedir. $n = 1000$, $\alpha = 0{,}05$, $1 - \beta = 0{,}90$ ile Monte Carlo simülasyonları teorik öngörüleri doğrulamaktadır.

13 Sonuç ve Görünüm

Klasik Bell teorisinin ölçüm-teorik bir uzantısını sunduk. Meta-Bell Teorisi, gözlemlenen korelasyonların tüm yerel-gerçekçi açıklamalardan sapmasını ölçen bir dolanıklık ölçüsü tanımlamakta ve önemsiz bozunum özel durumunda CHSH eşitsizliğine indirgenmektedir. Teori evrenseldir; her korelasyonlu sistem Meta-Bell çerçevesine gömülebilir. Dağıtık konsensüs protokollerinde dolanıklık ölçüsü, bağımsız doğrulayıcılar arasındaki kolüzyon dışılığın istatistiksel kanıtı olarak hizmet vermektedir.

Kaynaklar

[1] J. S. Bell, *On the Einstein Podolsky Rosen Paradox*, Physics 1(3):195–200, 1964.

[2] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, R. A. Holt, *Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories*, PRL 23:880–884, 1969.

[3] A. Aspect et al., *Experimental Test of Bell's Inequalities*, PRL 49:1804–1807, 1982.

[4] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge, 2010.

[5] N. Brunner et al., *Bell Nonlocality*, Rev. Mod. Phys. 86:419–478, 2014.

[6] R. Horodecki et al., *Quantum Entanglement*, Rev. Mod. Phys. 81:865–942, 2009.

[7] C. E. Shannon, *A Mathematical Theory of Communication*, BSTJ 27, 1948.

[8] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory*, Wiley, 1957.